

7535 NL

ZC 44

ARCHIEF

ZW

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

Capita Selecta uit de Differentiaalrekening

Serie voordrachten door

Prof. Dr. N.H. Kuiper

ZC 44

1958

Capita Selecta uit de Differentiaalmeetkunde

Serie voordrachten door

Prof. Dr N.H. Kuiper

1958

C^α -functies.

Een reële functie van een reële variabele heet in een punt P , respectievelijk een interval I , van de klasse van differentieerbaarheid α (is een C^α -functie) indien

-) voor $\alpha=0, 1, \dots, \infty$: de α -de afgeleide functie bestaat en continu is in P resp. I
-) voor $\alpha=\infty$: alle afgeleiden bestaan in P resp. I
-) voor $\alpha=\omega$: indien de functie analytisch is in een omgeving van P resp. I .

Neemen we $0 < \alpha < \omega$, α natuurlijk getal, dan is indien $\alpha < \beta$ elke C^β -functie tevens C^α .

De functie $x \mapsto |x-r|$ is C^0 en niet C^1 voor $x=r$.

En $r_1, r_2, \dots$ de afgetelde rationale getallen tussen 0 en 1, dan

$$\varphi_0(x) = 2x + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x-r_k|, \quad 0 \leq x \leq 1$$

is een functie die C^0 en niet C^1 is in de rationale getallen. $\varphi_0(x)$ toenemend.

Definiëren we $\varphi_k(x)$ inductief door

$$\varphi_{m+1}(x) = \int_0^x \varphi_m(x) dx, \quad m \geq 0 \text{ geheel},$$

is $\varphi_k(x)$ C^k en niet C^{k+1} in de rationale getallen r_1 .

De functie f : $\begin{cases} x \mapsto 0 & \text{voor } x \leq 0 \\ x \mapsto e^{-\frac{1}{x}} & \text{voor } x > 0 \end{cases}$



C^∞ en niet C^ω voor $x=0$.

$$\varphi_\infty(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(x-r_k), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

is C^∞ (de som convergeert gelijkmatig) en nergens C^∞ .

Stel $\varphi_\infty(x)$ was C^∞ in een punt, dus in een omgeving die dan ook een rationaal punt bevat. Dan had $\varphi_\infty(x)$ in r alle afgeleiden gemeen met

$$x + \sum_{r_k < r} 2^{-k} f(x - r_k)$$

en was dus in een omgeving van r hieraan gelijk. Voor geen $s > r$ wordt $\varphi_\infty(x)$ echter door deze formule gegeven.

Wenst men analoge functies voor $-\infty < x < \infty$, dan neme men

$$\psi_\alpha(x) = \varphi_\alpha\left(\frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}\right) \text{ in plaats van } \varphi_\alpha(x).$$

2. C^α -n-varieteit X .

Een locale reële functie op een topologische (Hausdorff) ruimte X is een paar bestaande uit een omgeving $U \subset X$ en een afbeelding $f : U \xrightarrow{\text{in}} \mathbb{R}$. Een C^α -n-varieteit, d.i. een n -dimensionale varieteit van de klasse van differentieerbaarheid α , is een topologische ruimte X met een aftelbare dekkende deelverzameling in elke dekkende verzameling omgevingen ("aftelbare basis"), met een verzameling K van lokale reële functies, de C^α -functies op X geheten, en met de volgende eigenschappen.

1. Is $V \subset U$ (omgevingen), $(U, f) \in K$, dan $(V, f|_V) \in K$.
2. Is $(U, f_i) \in K$ $i=1, \dots, r$, $g(x_1, \dots, x_r) \in C^\alpha$ voor $x_i \in f_i(U)$, dan $\{U, g(f_1, \dots, f_r)\} \in K$.
3. Is $p \in X$, dan bestaan $U \ni p$, $(U, x_i) \in K$, $i=1, \dots, n$, zó dat $(x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ een homeomorfie-in is en
4. $(U, f) \in K$ dan en alleen dan wanneer

$$f = g(x_1, \dots, x_n) \quad g \in C^\alpha.$$

Het stel functies $(x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heet een stelsel coördinaten.

Stelling: Zijn $(U; x_1, \dots, x_n)$ en $(U; y_1, \dots, y_n)$ coördinatenstelsels voor een C^α -varieteit $\alpha > 0$, dan is

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Bewijs: Volgens de definities is y_1 een C^α -functie in $x_1, \dots, x_n$ en x_1 idem in $y_1, \dots, y_n$. Dus is (en bestaan)

$$1 = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$$

en het gestelde volgt.

Men geeft een C^α -n-varieteit meestal door een stel locale C^α -functies (voortbrengenden van de C^α -structuur) of stelsels coördinaten, waaruit alle C^α -functies en coördinatenstelsels kunnen worden afgeleid.

Voorbeelden.

1. C^ω -varieteit op R^n : Voortbrengende functies $x_1, \dots, x_n$!
2. C^β -1-varieteit. Punten: $-\infty < x < \infty$. Voortbrengende functie: x
andere C^β -1-varieteit. Idem " " " : $\psi_\alpha(x)$.
Zie §1, $\alpha < \beta$.

N.B. De twee C^β -1-varieteiten op dezelfde puntverzameling zijn niet identiek, wel "equivalent"; ze kunnen niet door "inwendige" eigenschappen worden onderscheiden.

3. C^ω -2-sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Voortbrengende functies x, y en z .
Coördinatenstelsels: (x, y) voor $z > 0$ en voor $z < 0$; cyclisch x, y, z .
4. Torus $(x, y, z) = \{(a+b \cos \varphi) \cos \psi, (a+b \cos \varphi) \sin \psi, b \sin \varphi\}$.
Voortbrengende functies x, y, z .
Coördinatenstelsels met functies $\varphi, \psi: \begin{cases} k\pi - \varepsilon < \varphi < k\pi + \pi + \varepsilon & 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} \\ l\pi - \varepsilon < \psi < l\pi + \pi + \varepsilon \end{cases}$
 $(k, l) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$.

3. C^α -afbeelding $f: X \rightarrow Y$. Vectoren.

Zijn X en Y verzamelingen, dan is een afbeelding van X in Y een verzameling paren (x, y) met $x \in X$ en $y \in Y$, zó dat elke $x \in X$ precies één keer als eerste in een paar voorkomt. y heet het beeld van x . Is V een deelverzameling van X dan is fV de verzameling van alle fx met $x \in V$. fV heet het beeld van V ; $fX \subset Y$ heet beeld van f .

Een afbeelding $f:X \rightarrow Y$ geeft op natuurlijke wijze een afbeelding van de deelverzamelingen van X op deelverzamelingen in Y .

Is voorts φ een globale reële functie op Y , $\varphi:Y \rightarrow \mathbb{R}$, dan is $\varphi f:X \rightarrow \mathbb{R}$ een globale reële functie op X . Is (W, φ) een reële functie gedefinieerd op een deelverzameling $W \subset Y$, dan is $(f^{-1}W, \varphi f)$ een reële functie gedefinieerd op de deelverzameling $f^{-1}W$.

Een afbeelding $f:X \rightarrow Y$ geeft op natuurlijke wijze een afbeelding f^* van de functies op Y (globaal resp. op deelverzameling) op functies op X (globaal resp. op deelverzameling)

$$f^*: \varphi \longrightarrow \varphi f .$$

f^* beeldt ook stelsels functies op Y af op stelsels functies op X . Aan sommige stelsels functies kent men daarom het bijvoegelijke naamwoord covariant toe (daarmee aangevend een gedrag analoog aan dat van functies).

Sommige stelsels deelverzamelingen heten om dezelfde reden contra-variant (gedrag bij afbeeldingen net tegengesteld aan het gedrag der functies).

Zijn X en Y C^α -variëteiten, dan heet een afbeelding $f:X \rightarrow Y$ een C^α -afbeelding, indien f^* de lokale C^α -functies op Y , afbeeldt in de verzameling der lokale C^α -functies op X . Zijn b.v. $y_1, \dots, y_n$ lokale coördinaten op Y , dan moeten $f^*(y_1), \dots, f^*(y_n)$, waarvoor we kort schrijven $y_1, \dots, y_n$ functies op X zijn die in lokale coördinaten $x_1, \dots, x_m$ uitgedrukt (gewone) C^α -functies zijn

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_m).$$

Daarmee sluiten we aan bij de elementaire locale definitie van een C^α -afbeelding.

Beschouw de puntverzameling R met de C^ω -structuur bepaald door de reële functie: de identieke afbeelding $t=t$. Een C^α -afbeelding k van $0 \leq t \leq 1$ in de C^α - m -variëteit X heet een geparametriseerde C^α -kromme. Hij wordt in locale coördinaten lokaal gegeven door $x_i = x_i(t)$, $i=1, \dots, m$, $x_i(t)$ een C^α -functie. Kort $x=x(t) \in R^m$.

Het beeld van $t=0$ heet beginpunt; $x(0) = \{x_1(0), \dots, x_m(0)\}$.

Twee C^α -functies φ en ψ op $U \subset X$ heten in het punt $p \in U$ C^β -equivalent, $\beta \leq \alpha$, indien voor elke C^β -kromme $k: 0 \leq t \leq 1 \rightarrow X$ met beginpunt p geldt $\frac{d^\beta}{dt^\beta} (\varphi \circ k) = \frac{d^\beta}{dt^\beta} (\psi \circ k)$

of korter genoteerd $\frac{d^\beta \varphi}{dt^\beta} = \frac{d^\beta \psi}{dt^\beta}$.

Deze relatie is inderdaad een equivalentie ($\varphi \sim \psi, \psi \sim \chi \Rightarrow \varphi \sim \chi$, $\varphi \sim \psi \Rightarrow \psi \sim \varphi$, $\varphi \sim \psi$ en $\psi \sim \chi \Rightarrow \varphi \sim \chi$). Een equivalentie klasse heet een β -de orde omgeving in p van een functie. De equivalentieklasse van φ wordt aangegeven met $d^\beta \varphi$ en heet ook β -de differentiaal van φ .

Voor $\beta=1$ heet het ook een differentiaal of ook een covariante vector. $\frac{d^\beta (\varphi \circ k)}{dt^\beta}$ heet de waarde van $d^\beta \varphi$ op de geparametriseerde kromme k .

Stelling: $d^\beta \varphi = d^\beta \psi \iff$ alle partiële γ -de afgeleiden naar de coördinaten gelijk voor $0 < \gamma \leq \beta$.

Voor het eendimensionale geval is b.v. x een coördinaat. Is nu $d^2 \varphi = d^2 \psi$, dan is voor de kromme $x = \alpha t + \beta t^2$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d\varphi}{dx} (\alpha + 2\beta t) \right\} = \\ &= \frac{d^2 \varphi}{dx^2} (\alpha + 2\beta t)^2 + \frac{d\varphi}{dx} \cdot 2\beta \end{aligned}$$

en voor $t=0$ $\alpha \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dx}$.

Dus $\alpha \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dx} = \alpha \frac{d^2 \psi}{dx^2} + 2\beta \frac{d\psi}{dx}$ voor elke α, β

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dx}, \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2}$$

Vormen $x_1, \dots, x_m$ een coördinatenstelsel in een omgeving van p , dan is in $p(t=0)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

Kiest men $\alpha_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (t=0)$ $\alpha_i \in \mathbb{R}$, dan blijkt

$$d\varphi = d\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\right)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{dx_i}{dt} \text{ voor elke kromme met beginpunt } p.$$

De differentiaal $d\varphi$ in het punt p vormen een m -dimensionale vectorruimte met basis de differentiaal van de functies van een coördinatenstelsel. De naam covariante vector is dus passend.

Stelling. De geparametriseerde krommen zijn contravariant. De differentiaal zijn covariant. De β -de differentiaal zijn covariant.

Het gestelde is een korte formulering van de volgende beweringen. Het beeld onder een C^α -afbeelding f van een C^α -kromme is een C^α -kromme. Het beeld onder f^* van een β -de differentiaal geeft een β -de differentiaal.

De differentiaal in het punt $p \in U$ van een C^α - m -variëteit X (voor $\alpha \geq 1$) vormen een m -dimensionale vectorruimte T^* . Een basis van T^* wordt gevormd door de differentiaal van de functies van een coördinatenstelsel $(U; x_1, \dots, x_m)$ dat zijn $dx_1, \dots, dx_m$. De getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ in $d\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i dx_i$ heten de coördinaten van $d\varphi$ ten opzichte van $(U; x_1, \dots, x_m)$. Is $(U; y_1, \dots, y_m)$ een tweede coördinatenstelsel en

$$d\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i dx_i = \sum_{j=1}^m \beta_j dy_j = \sum_{i,j=1}^m \beta_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i, \quad ,$$

dan is dus

$$(3.1) \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Twee geparametriseerde C^α -krommen k en $k': t \rightarrow X$ met beginpunt $p \in U$, in de C^α - m -variëteit X heten C^β -equivalent in p , $\beta \leq \alpha$, indien voor elke C^β -functie op $U \subset X$ geldt

$$\frac{d^\beta (\varphi \circ k)}{dt^\beta} = \frac{d^\beta (\varphi \circ k')}{dt^\beta}.$$

Een equivalentieklasse van een kromme in het punt p heet een β -de orde kiem van de kromme. Voor $\beta = 1$ heet het ook een contravariante vector. Elke kromme die "hoort tot" een gegeven contravariante vector in p , bepaalt een en dezelfde lineaire functie op T^* en op deze wijze kan elke lineaire functie op T^* uit precies één contravariante vector verkregen worden. De contravariante vectoren in p vormen dus de duale vectorruimte van T^* , die we aanduiden met T . De coördinaten van de contravariante vector die gegeven wordt door een kromme $k: t \rightarrow X$, t.o.v. $(U; x_1, \dots, x_m)$ worden

gedefinieerd als

$$\frac{d(x_1 k)}{dt}, \dots, \frac{d(x_m k)}{dt}$$

of kort geschreven $\left\{ \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_m}{dt} \right\} = (\alpha^1, \dots, \alpha^m).$

Bij gebruik van coördinaten is de waarde van de differentiaal met coördinaten $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ op de contravector met coördinaten $\beta^1, \dots, \beta^m$ gelijk aan $\sum_{i=1}^m \alpha_i \beta^i$, kort geschreven volgens Einstein-conventie $\alpha_i \beta^i$.

Een C^α -afbeelding $f: X \rightarrow Y$ beeldt een C^β -equivalentieklasse van krommen in een punt $p \in X$ af in één C^β -equivalentieklasse van krommen in $f(p)$, en een C^β -equivalentieklasse van C^β -functies in $f(p)$ in één C^β -equivalentieklasse van C^β -functies in p . De C^α -afbeelding $f: X \rightarrow Y$ induceert dus op natuurlijke wijze een covariante afbeelding van de β -de orde differentiaal, en een contravariante afbeelding van de β -de orde kiemen van krommen. In de punten $p \in X$ en $f(p) \in Y$ zijn deze afbeeldingen homomorfismen van $T(p)$ in $T(f(p))$, en van $T^*(f(p))$ in $T^*(p)$, dual t.o.v. elkaar, zodat ze dezelfde rang (= dimensie beeldruimte) hebben. Is deze rang gelijk aan $\dim T(p) = \dim T^*(p)$, dan is het eerste homomorfisme een isomorfisme-in en het tweede een homomorfisme-op. Geldt dit voor elk punt $p \in X$, dan heet de afbeelding f een immersie. Hij is dan lokaal topologisch.

Is $f: X \rightarrow Y$ een topologische C^α -immersie van X in Y , dan heet $f(X)$ een C^α -deelvariëteit van Y . f heet nu een C^α -inbedding. De identieke afbeelding van $f(X)$ in Y is ook een C^α -inbedding.

Een tensor in p is een multilineaire functie op een gedurig direct product van vectorruimten T^* en T , bijv. op $T^* \times T^* \times T$. Contravariante ($\in T^*$) en covariante vectoren ($\in T$) zijn voorbeelden. Zijn α_i, β_j, f^k $i, j, k = 1, \dots, m$ coördinaten van vectoren t.o.v. $(U; x_1, \dots, x_m)$ en is

$$\sum \eta^{ij}_k \alpha_i \beta_j f^k$$

een lineaire functie in α_i, β_j en f^k , dus een tensor, dan heten de getallen η^{ij}_k de coördinaten van die tensor t.o.v. $(U; x_1, \dots, x_m)$.

Stelling. De covariante vectoren op een C^α -ruimte X vormen een $C^{\alpha-1}$ -ruimte ($\alpha-1=\alpha$; $\alpha-1=\omega$).

Dit volgt direct uit de transformatieformules voor coördinaten $(x_1, \dots, x_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ en $(y_1, \dots, y_m; \beta_1, \dots, \beta_m)$:

$$y_j = y_j(x_1, \dots, x_m) \quad C^\alpha\text{-functies voor } j=1, \dots, m$$

en formule (3.1) met

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \quad C^{\alpha-1}\text{-functies voor } i, j=1, \dots, m.$$

De ruimte der covariante-vectoren op X is een vezelruimte met basis X en met vezels $T^*(p), p \in X$ en de lineaire groep als groep. Een dwarssnede daarin die een C^β -deelvariëteit is en geen contravector met erige vezel gemeen heeft, heet een C^β -differentiaalvorm of covectorveld. Uiteraard is $\beta \leq \alpha - 1$.

Het analoge kan men doen voor andere soorten tensoren. Een veld van tensoren die in elk punt antisymmetrische multilineaire functies op $T \times T \times \dots \times T$ (r factoren) zijn heet een r -differentiaalvorm of r -vorm. Zijn in een punt van de C^α - m -variëteit $X, \omega_1, \dots, \omega_r$ 1-differentiële dan is het uitproduct $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$ per definitie de antisymmetrische multilineaire functie in $t_1, \dots, t_r \in T$ gegeven door

$$\frac{1}{r!} \det \{ \omega_i(t_j) \}.$$

Merk op dat $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$ antisymmetrisch is in zijn uitfactoren bijv. $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$ en $\omega_1 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$. De m -vormen in een punt van X vormen een 1-dimensionale vectorruimte. Twee m -vormen $\phi \neq 0$ en $\psi \neq 0$ heten orientatie-equivalent in een omgeving van X indien $\phi = \lambda \psi, \lambda > 0$. Een equivalentieklasse heet (ook globaal eventueel) een orientatie op X . Zijn $x_1, \dots, x_m$ lokale coördinaten dan hebben $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ en $dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_m$ tegengestelde orientatie.

Wij zullen in het bijzonder ook te maken krijgen met tensoren die in elk punt van X symmetrische multilineaire functies op $T \times T$ zijn. Probleem. Elke C^α -variëteit bepaalt op natuurlijke wijze een C^β -variëteit voor $\beta \leq \alpha$. Kan een C^β -variëteit altijd zo uit een C^α -variëteit verkregen worden?

4. Differentiaalmeetkunde in euclidische ruimten.

Een euclidische vectorruimte E is een reële vectorruimte, waarvan we de vectoren door $p, q, \dots$ voorstellen, met een positief definitie

kwadratische functie, voorgesteld door $pp, p \in E$, welke eenduidig een symmetrische bilineaire functie $pq = qp$, genaamd inproduct, bepaalt. De vectoren in E corresponderen 1-1 met punten van een euclidische ruimte met afstand tussen p en q gelijk aan $\sqrt{(p-q)^2}$, of in uitverkoren coördinaten $y_1, \dots, y_N$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N \{y_i(p) - y_i(q)\}^2}.$$

De coördinaten $y_1, \dots, y_N$ bepalen een C^∞ - N -structuur in E .

De definitie van β -de orde differentiaal van een C^β -functie op X kan ook toegepast worden indien men als functiewaarden elementen van een reële vectorruimte zoals E neemt. Zo een functie zal daarbij C^β heten indien de samenstelling van deze functie $X \rightarrow E$ en elke C^β -functie $E \rightarrow R$ een reële C^β -functie $X \rightarrow R$ is.

Schrijven we p voor de identieke afbeelding van E op E of van een C^∞ -deelvarieteit van E in E , dan is dp zo een differentiaal, die voor de contravariante vector gegeven door de kromme $t \rightarrow E$ in het betreffende punt als waarde de vector $\frac{dp}{dt}$ aanneemt. Zijn $x_1, \dots, x_m$ coördinaten op een C^∞ -deelvarieteit X in E dan is

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial p}{\partial x_m} dx_m.$$

Een basis voor de waarden van dp op X wordt dus gevormd door de m vectoren $\frac{\partial p}{\partial x_i}$, $i=1, \dots, m$.

Het inproduct $dp \, dp = (dp)^2$ is in elk punt een kwadratische positief definitieve functie op de vectorruimte der contravariante vectoren aldaar. Uitgeschreven in de coördinaten $x_1, \dots, x_m$ voor X is hij

$$(dp)^2 = \left(\sum \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i \right)^2 = \sum \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} dx_i dx_j.$$

$(dp)^2$ heet het boogelement in E . De lengte van een C^1 -kromme $t \rightarrow E$ wordt hiermee gedefinieerd door de formule

$$s = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \sqrt{(dp)^2}.$$

Opgevat als functie van t_1 heet het een booglengte langs de kromme. Men schrijft ook $ds = \sqrt{(dp)^2}$, $ds^2 = (dp)^2$.

De definitie van lengte is zó dat de afstand van twee punten in E gelijk is aan de lengte van het rechte verbindingslijnstuk.

Definitie: Een C^α -variëteit met een $C^{\alpha-1}$ -tensorveld, in elk punt symmetrische functie op $T \times T$, die een positief definitie kwadratische functie ds^2 op de contravariante vectoren (T) bepaalt, heet een C^α -Riemannse ruimte ($\alpha \geq 1$). De lengte van een C^α -kromme is $\int ds$.

Probleem: Op welke C^α -variëteiten bestaat een C^α -Riemannse ruimte (men zegt ook metriek) zie § 5.

Uit het bovenstaande volgt direct dat elke C^α -deelvariëteit van E een C^α -Riemannse ruimte is met $ds^2 = dp \, dp$. Zijn X en Y C^α -Riemannse ruimten met metriek ds_x^2 en ds_y^2 en bestaat een C^α -inbedding-op, $f: X \rightarrow Y$, zó dat het covariante beeld van ds_y^2 juist ds_x^2 is, dan heet f een C^α -isometrische inbedding en X en Y heten isometrisch.

Probleem: Wanneer bestaat een C^α -isometrische inbedding van een C^α -Riemannse m -ruimte in E^N ? Wij zullen later misschien dit probleem aanroeren.

De formules van Frenet in E^4 .

Stel $s \rightarrow p(s) \in E$ is een C^∞ -kromme met de booglengte s als parameter. Stel de vectoren $\frac{d^\beta p}{ds^\beta}$ $\beta=1,2,3$ zijn onafhankelijk. Kies (voor elk punt $p(s)$) een ds basis van onderling loodrechte eenheidsvectoren, $b_1, \dots, b_4$ zó dat $b_i, i \leq k$, dezelfde ruimte opspannen als $\frac{d^i p}{ds^i}$, $i \leq k$, voor $k=1,2,3$ en zó dat b_i continue functie van s is. Wegens $\frac{d}{ds} b_i b_j = \text{constant}$ volgt

$$\frac{d}{ds} (b_i b_j) = \frac{db_i}{ds} b_j + b_i \frac{db_j}{ds} = 0$$

en daarmee volgt het bestaan van ρ_1, ρ_2, ρ_3 met

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= b_1 & \frac{db_1}{ds} &= \rho_1 b_2 \\ \frac{db_2}{ds} &= -\rho_1 b_1 & &+ \rho_2 b_3 \\ \frac{db_3}{ds} &= & -\rho_2 b_2 &+ \rho_3 b_4 \\ \frac{db_4}{ds} &= & &- \rho_3 b_4 \end{aligned}$$

ρ_i heet i -de kromming van de kromme.

Men kan bewijzen dat wanneer de C^∞ -functies $\rho_1(s), \rho_2(s), \rho_3(s)$ gegeven zijn dat dan een kromme in E^4 bestaat waarvoor de krommingen juist deze functies van de booglengte zijn. Is $\rho_3(s)=0$ dan ligt de kromme in een E^3 .

Stelling [4.1] $p(s)$ zij een kromme in E^4 met krommingen $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ en ρ_3 . De 3-varieteit met parametervoorstelling

$$q(s, u, v) = p + u b_1 + v b_2, \quad v > 0$$

is lokaal isometrisch met E^3 . ("Ontwikkelbaar"; Analooq in andere dimensies).

Bewijs: $dq = dp + b_1 du + u db_1 + b_2 dv + v db_2 = b_1(ds - v\rho_1 ds + du) + b_2(u\rho_1 ds + dv) + b_3(v\rho_2 ds)$.

Merk op, dat de waarden van dq voor een constante waarde van s , een driedimensionale deelruimte opspannen ("constant raak- E^3 ").

$$(dq)^2 = \{(1 - v\rho_1)ds + du\}^2 + (u\rho_1 ds + dv)^2 + (v\rho_2 ds)^2.$$

Deze uitdrukking is voor $v \neq 0$ een positief definitie kwadratische functie in ds , du en dv met coëfficiënten die alleen van ρ_1 en ρ_2 en niet van ρ_3 afhangen. Men zou dus hetzelfde gevonden hebben voor een kromme met krommingen $\rho_1(s), \rho_2(s)$ en 0. In dit geval ligt de kromme in E^3 en s , u en v zijn lokale coördinaten voor een deel van E^3 . Hieruit volgt het gestelde.

N.B. door $\rho_3(s)$ continu over te laten gaan in de functie 0 kan men zelfs de gegeven variëteit continu verbuigen tot hij vlak is.

Het beeld van een cirkel onder een C^∞ -inbedding heet een gesloten C^∞ -kromme.

$p=p(s)$ zij een vlakke gesloten C^2 -kromme met booglengte s . Dan is

$$\begin{aligned} 0 &= \oint \frac{d}{ds} \left[p \frac{dp}{ds} \right] ds = \oint \left(\frac{dp}{ds} \right)^2 ds + \oint p \frac{d^2 p}{ds^2} ds \\ &= \oint ds + \oint \rho p b_1 ds. \end{aligned}$$

Dus

Stelling [4.2] $\oint \rho(-p b_1) ds =$ omtrek vlakke gesloten C^2 -kromme.

Hierin is $|pb_1|$ de afstand van (vector) 0 tot de raaklijn in het punt s , en ρ de kromming in s .

N.B. Is 0 een punt waardoor geen enkele of hoogstens één raaklijn aan de gesloten C^2 -kromme gaat, dan is $\oint |\rho| \cdot |pb_1| ds =$ omtrek.

Is 0 een punt niet op de kromme, waardoor wel raaklijnen gaan, dan is

$$\oint |\rho| \cdot |pb_1| ds > \text{omtrek}$$

(verg. Hsiung, C.C. Some integral formulas for closed hypersurfaces. Math.Scandinavica 2 (1954), 286-294).

Krommen op een C^α -(N-1)-deelvariëteit van E^N .

Stel p variabel in de C^α -(N-1)-variëteit $X \subset E^N$. De differentiaal dp neemt dan waarden in een punt van X aan die vectoren van een N-1-dimensionale vectorruimte zijn. Stel n is een eenheidsvector (normaal) in E^N loodrecht daarop, en continu variërend met p. Dan is het in-product $dp \cdot n = 0$, en nu volgt de belangrijke formule van Meusnier

$$[4.3] \quad d(dp \cdot n) = d^2p \cdot n + dp \cdot dn = 0 \quad (d \text{ is gewone differentiatie}).$$

Wij concentreren de aandacht op een vast punt p van $X \subset E$ met de raakruimte T t.o.v. X.

dp dp, die de metriek bepaalt, is een kwadratische functie op T en heet de eerste fundamenteelvorm in $p \in X \subset E$.

dp dn is ook een kwadratische functie op T en heet de tweede fundamenteelvorm.

Is p(s) een kromme met booglengte s in X dan is

$$\frac{d^2p}{ds^2} = \rho b_1 \text{ de krommingsvector, } \frac{d^2p}{ds^2} \cdot n = \rho b_1 n$$

$$= \rho \cos(\text{hoek } b_1 \text{ en } n) \text{ de normale kromming } \rho_n \text{ en}$$

$$\sqrt{\left(\frac{d^2p}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2p}{ds^2} \cdot n\right)^2} = \sqrt{\rho^2 - \rho_n^2} = \rho_g \text{ de geodetische kromming}$$

van de kromme in X.

Voor een kromme op een C^α -m-deelvariëteit X is ρ_g (algemener) de lengte van de orthogonale component van $\frac{d^2p}{ds^2}$ op de euclidische m-deelruimte van E die door het betreffende $\frac{d^2p}{ds^2}$ punt van X gaat en daar dezelfde contravariante raakruimte heeft. Voor $m=1$ is steeds $\rho_g=0$.

Uit [4.3] volgt dat de normale kromming

$$\frac{d^2p}{ds^2} \cdot n = - \frac{dp}{dp} \frac{dn}{dp}$$

uitsluitend door de raakvector $\frac{dp}{ds}$ reeds is bepaald.

De eigenwaarden van dp d.n. t.o.v. dp dp heten de hoofdkrommingen k_i $i=1, \dots, N-1$ van $X \in E$; de eigenvectoren geven de hoofdrichtingen. Kiest men als coördinaten in T de vectoren in T^* die een cobasis vormen van $N-1$ eenheids-eigenvectoren in T , zeg ω_i $i=1, \dots, N-1$, dan is

$$\rho_n = - \frac{\sum k_i \omega_i^2}{\sum \omega_i^2} \quad \text{vergelijking van Euler.}$$

Stelling [4.4] Fenchel: Voor een gesloten C^2 -kromme $p(s)$ in E^3 is $\oint |\rho| ds \geq 2\pi$; $\oint |\rho| ds = 2\pi$ houdt in dat de kromme vlak en convex is. Fary-Milnor: $\oint |\rho| ds \leq 4\pi$ houdt in dat de kromme in E^3 een triviale knoop is (men zegt: "geen knoop heeft").

(Veralgemeend door Chern-Lashof. Am. Journal of Math. LXXIX 306-318 (1957)).

Bewijs: De loodrechte contravariante eenheidsvectoren in de punten van $p(s)$ vormen een C^1 -2-variëteit (abstract; ligt niet in E^3) N , die een C^1 -2-torus is met C^1 -coördinaten s en χ waarbij χ een hoekmaat voor elke keuze $s=\text{constant}$ zij.

De eenheidsvectoren $\in N$ worden nu in E^3 alle evenwijdig verplaatst naar het punt O in de euclidische vectorruimte E^3 en de beelden worden op natuurlijke wijze voorgesteld door punten van de 2-sfeer S met vergelijking $p^2=1$. Zo ontstaat de C^1 -afbeelding

$$h : N \rightarrow S.$$

Zijn u, v lokale coördinaten op S , dan is de oppervlakte van een open stuk G in S een integraal van de soort

$$\int_G |\alpha(u, v) du \wedge dv|.$$

Is H een open deel van N dan bestaat $f(H)$ een stuk oppervlak van S gelijk aan (meervoudige bedekking ook meervoudig gerekend)

$$\int_H |f(s, \chi) ds \wedge d\chi|$$

indien $f(s, \chi)$ gedefinieerd is door de eis dat $f(s, \chi) ds \wedge d\chi$ het beeld van $\alpha(u, v) du \wedge dv$ is onder de afbeelding $h: N \rightarrow S$.

Voor een stuk cirkelboog $s_1 < s < s_2$ op $p(s)$, beschrijft $h(b_1(s))$ een stuk grote cirkel op S met lengte $\int_{s_1}^{s_2} |\rho| ds = \varphi$, en dus is

$$\int_{s_1}^{s_2} |\rho(s, \chi)| ds \wedge d\chi = \frac{\varphi}{\pi} \cdot 4\pi = 4\varphi = \int_{s_1}^{s_2} 4|\rho| ds.$$

In dit geval is $\int_{\chi=0}^{2\pi} |\rho(s, \chi)| d\chi = 4|\rho|$.

Maar dan geldt het algemeen want linker en rechterlid zijn bepaald door p , $\frac{dp}{ds}$ en $\frac{d^2p}{ds^2}$ en door elk punt van $p(s)$ kan men een cirkel of rechte bepalen die dit met $p(s)$ gemeen heeft.

Wij concluderen dat $h(N)$ op S een oppervlakte

$$4\oint |\rho| ds$$

beslaat.

Beschouwen wij thans een willekeurig punt q op S . De functie op de kromme $p(s)$ die de afstand is van het punt $p(s)$ tot een vlak dat loodrecht staat op q en de kromme niet snijdt is een C^2 -functie $z(s)$ die minstens één maximum en minstens één minimum heeft. In de bijbehorende punten op de kromme heeft q de richting van een normaal. Elk punt q op S wordt dus door $h(N)$ minstens tweemaal bedekt en

$$4\oint |\rho| ds \geq 2 \cdot 4\pi = 8\pi$$

$$\oint |\rho| ds \geq 2\pi.$$

Liggen de drie vectoren $h(b_1(s_1))$, $h(b_1(s_2))$ en $h(b_1(s_3))$ niet op een grote cirkel op S en zou men in elk van de 8 open delen waarin S verdeeld wordt door de grote cirkels loodrecht op die vectoren, een omgeving kiezen en aannemen dat geen van deze meer dan één keer door $h(N)$ bedekt zou worden, dan kreeg men een contradictie uit continuïteitsoverwegingen. In het genoemde geval is dus

$$\oint |\rho| ds > 2\pi.$$

$\oint |\rho| ds = 2\pi$ kan dus alleen voorkomen indien de kromme vlak is. In dit geval kiezen we in het vlak van de kromme twee loodrechte eenheidsvectoren e_1 en e_2 en stellen

$$\frac{dp}{ds} = \cos \varphi \cdot e_1 + \sin \varphi \cdot e_2.$$

Dan is $\rho = \frac{d\varphi}{ds}$ en $\oint \rho ds = \oint \frac{d\varphi}{ds} ds = \oint d\varphi = 2\pi$ of -2π .

We kiezen de orientatie van e_1 en e_2 achteraf nog zo dat

$$\oint \rho ds = 2\pi.$$

$$\text{Nu is } \oint |\rho| \, ds = \oint \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| \, ds = 2\pi = \oint \frac{d\varphi}{ds} \, ds$$

dan en slechts dan, indien in elk punt van de kromme

$$\left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \frac{d\varphi}{ds} \text{ dus } \frac{d\varphi}{ds} \geq 0$$

hetgeen convexiteit inhoudt.

Is $\oint |\rho| \, ds < 4\pi$, dan bestaat een vector $q \in S$ met een omgeving van q in S , waarvan elk punt door $h(N)$ minder dan 4 keer getroffen wordt. Noem q vertikaal en de eerder genoemde functie z hoogte. De hoogte heeft één (relatief) maximum zeg in $p(s_2)$ en één (relatief) minimum zeg in $p(s_1)$, $0 < s_2 - s_1 < \text{omtrek}$. De volgende homeomorfe afbeelding van E^3 op zich beeldt de gegeven kromme op een gesloten vlakke kromme af. De existentie van die afbeelding is per definitie het triviaal zijn van de knoop.

Het homeomorfisme:

voor $z \geq z(p(s_2))$ de identiteit;

voor $z(p(s_1)) < z = z(p(s)) < z(p(s_2))$, $s_1 < s < s_2$

de beweging in dit vlak die het midden van de koorde in dit vlak vertikaal onder $p(s_2)$ brengt, en de richting van de koorde vanuit $p(s)$ beginnend, gelijk maakt aan de richting van $\frac{dp}{ds}$ in $p(s_2)$;

voor $z = z(p(s_1))$ continu aansluitend bij het vorige;

voor $z < z(p(s_1))$ dezelfde beweging als in $z = z(p(s_1))$.

Wij geven het bewijs voor geval $\oint |\rho| \, ds = 4\pi$ niet.

Correctie. p.14 regel 14-9 v.o. moet zijn:

Is de kromme niet vlak dan is $\max z > \min z$, hoe de eenheidsvector q ook gekozen is. Wij kiezen $q = b_3(s_0)$, waarbij s_0 een punt zij met torsie ongelijk nul. Stel $\max z$ en $\min z$ worden respectievelijk bereikt voor $s = s_1$ en $s = s_2$. Er zijn dan disjuncte omgevingen $I(s_1)$ en $I(s_2)$ op de kromme met langs de kromme gemeten afstand $r > 0$, en een omgeving $U(q)$ van q op S , zó dat $h\{N \cap [s \in I(s_1)]\}$ zowel als $h\{N \cap [s \in I(s_2)]\}$ elk punt van $U(q)$ minstens éénmaal dekken. Voor voldoende kleine positieve $k < \frac{1}{3}r$ zijn $h b_1(s_0 - k)$, $h b_1(s_0)$ en $h b_1(s_0 + k)$ niet lineair afhankelijk, en dus vormen de drie grote cirkels van S loodrecht op deze richtingen onder meer een klein boldriehoekje, dat voor $k \rightarrow 0$ het punt $q = b_3(s_0)$ tot limiet heeft en dus voor k voldoende klein bevat is in $U(q) = U(b_3(s_0))$. Dit open driehoekje wordt door $h\{N \cap [s_0 - k \leq s \leq s_0 + k]\}$ reeds twee keer bedekt en aangezien $s_0 - k \leq s \leq s_0 + k$ geen punten gemeen heeft met $I(s_1)$, en tevens met $I(s_2)$ omdat $k < \frac{1}{3}r$, wordt dit driehoekje in totaal minstens drie keer bedekt door $h(N)$. Dan beslaat $h(N)$ op S een oppervlakte $> 8\pi$ en

$$\oint |\rho| ds > 2\pi.$$

5. De existentie van een C^α -Riemannse metriek op een C^α -variëteit $\alpha \geq 1$.

Stelling: Op een C^α -n-variëteit bestaat voor $1 \leq \alpha \leq \infty$ een C^α -Riemannse metriek.

[N.B. Volgens C.B. Morrey Jr bestaat ook op een compacte C^ω -n-variëteit een C^ω -Riemannse metriek, maar zijn bewijs is nog niet in detail gepubliceerd. (Notices Am.Math.Soc.5 no 1 februari 1958, p.73)] .

We zullen drie wezenlijk verschillende bewijzen van de stelling geven.

Eerste bewijs (Bochner S. (?))

In de topologie wordt bewezen dat bij X , een C^α -n-variëteit ($\alpha \geq 1$) volgens onze definitie, een stelsel (open) C^α -coördinatenstelsels $(U_\beta ; x_{\beta 1}, \dots, x_{\beta n})$ met begrensde beelden in R^n en open omgevingen V_β met $\bar{V}_\beta \subset U_\beta$ bestaan $\beta \in I$, zó dat X de vereniging van alle V_β is, en zó dat elk punt in X een omgeving heeft die hoogstens eindig vele der U_β ontmoet.

Wij beschouwen een $\beta \in I$ en het homeomorfe beeld van U_β en V_β in R^n . Stel de afstand van het beeld van de rand van U_β tot het beeld van de rand van V_β is r . Kies een verdeling van R^n in hyperkubi met zijden gelijk aan $r/(5\sqrt{n})$. Bij zo een kubus

$$p_i < x_i < q_i = p + r/5\sqrt{n} \quad i=1, \dots, n$$

beschouwen we de C^∞ -functie op R^n :

$$(5.1) \quad \prod_{i=1}^n f(x_i - p_i) \cdot f(q_i - x_i)$$

met f gedefinieerd als op pagina 1.

De som van alle aldus verkregen C^∞ -functies bij al die hyperkubi welke met hun rand geheel bevat zijn in het beeld van U_β in R^n , geeft een C^∞ -functie op R^n en door middel van het coördinatenstelsel een C^α -functie op U_β . Deze kan C^α -voortgezet worden over de gehele ruimte X , namelijk door de functiewaarde elders nul te kiezen. Zo ontstaat de functie ψ_β die positief is op V_β en niet-negatief op X .

Het product van ψ_β met de kwadratische vorm $\sum_{i=1}^n (dx_{\beta i})^2$ op U_β en met de kwadratische vorm 0 elders, is een globale

(op X) overal niet-negatieve kwadratische vorm, die we kort voorstellen door

$$\psi_{\beta} \cdot \sum_{i=1}^n (dx_{\beta i})^2 \quad \psi_{\beta} \in C^{\alpha}$$

en die positief definit is op V_{β} .

Een C^{α} -metriek op X wordt nu gegeven door

$$(5.2) \quad ds^2 = \sum_{\beta \in I} \left\{ \psi_{\beta} \cdot \sum_{i=1}^n (dx_{\beta i})^2 \right\}.$$

(Opm.: Het symbool $x_{\beta i}$ is gebruikt voor (a) het i-de getal in een rij getallen in R^n , (b) een lokale functie op X n.l. in de omgeving U_{β}).

N.B. De C^{α} -functies $\chi_{\beta} = \frac{\psi_{\beta}}{\sum_{\beta \in I} \psi_{\beta}}$

op X die niet-negatief zijn, hebben de volgende eigenschappen

$$\chi_{\beta} = 0 \text{ buiten } U_{\alpha}; \quad \chi_{\beta} > 0 \text{ in } V_{\beta}; \quad \sum_{\beta} \chi_{\beta} = 1.$$

Het stelsel functies heet een C^{α} -partitie van de functie 1 op X.

Tweede Bewijs. Whitney H. (Geometric integration theory, Princeton 1957). Wij geven dit bewijs alleen voor compacte X.

Een bewijs is geleverd indien we een C^{α} -inbedding f van de gegeven C^{α} -n-variëteit in enige euclidische ruimte kunnen aangeven. Want dan neme men het duale beeld van de euclidische metriek $ds^2 = f^* \circ (ds_E)^2$.

Stel χ_{β} , U_{β} , V_{β} , $x_{\beta i}$ zijn als boven met $\beta = 1, \dots, \nu$ (ν eindig wegens de compactheid van X). Een C^{α} -inbedding f van X in $R^{\nu(n+1)} = E^{\nu(n+1)}$ wordt gegeven door de $\nu(n+1)$ functies in $p \in X$:

$$(5.3) \quad f_{0\beta}(p) = \chi_{\beta}(p), \quad f_{i\beta}(p) = \chi_{\beta}(p) \cdot x_{i\beta}(p).$$

Dat f C^{α} is, is duidelijk.

De punten van $f(V_{\beta})$ worden C^{α} -afgebeeld op V_{β} door

$$x_i = f_{i\beta} / f_{0\beta}$$

waaruit volgt dat f lokaal een inverse heeft en een immersie is.

Stel $W_\beta = \{p \mid \chi_\beta(p) \neq 0\}$. Nu is $V_\beta \subset W_\beta \subset U_\beta$.

Zijn $p, q \in W_\beta$, $q \neq p$, dan is $f_{1\beta}(p)/f_{0\beta}(p) \neq f_{1\beta}(q)/f_{0\beta}(q)$, dus $f(p) \neq f(q)$.

Is $p \in W_\beta$, $q \notin W_\beta$, dan is $f_{0\beta}(p) \neq 0 = f_{0\beta}(q)$, dus $f(p) \neq f(q)$.

Dan is de immersie topologisch, dus een inbedding.

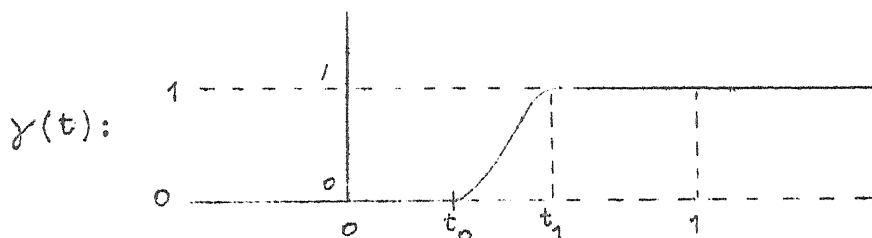
Derde bewijs. Steenrod N. The topology of fibre bundles, Princeton 1951.

Beschouw een C^α -triangulatie K van de C^α - n -variëteit X met simplices in coördinaten-omgevingen. Stel een Riemannse metriek is reeds gegeven op $U(K^r)$, een omgeving van het r -dimensionale skelet (dat bestaat uit alle simplices van dimensie $\leq r$). Wij moeten (nodig en voldoende) laten zien dat er onder die omstandigheden steeds geen hindernis is tegen de constructie van een C^α -metriek op een omgeving $U(K^{r+1})$ van K^{r+1} . De constructie verloopt simplex-gewijs.

Voor $r = -1$ kiezen we disjuncte coördinaten omgevingen van de punten in K^0 en nemen daarop C^α -metrieken naar willekeur.

Voor $r > -1$ beschouwen we een voorstelling van een "op te vullen" $r+1$ -dimensionaal simplex als simplex met zwaartepunt O in een euclidische vectorruimte en met op de rand vectoren die we door r voorstellen. tr doorloopt voor $0 \leq t \leq 1$ het gehele beeld van het simplex. Wij kiezen $0 < t_0 < t_1 < 1$ zó dat in het simplex de metriek gedefiniëerd is in alle punten tr met $t_0 \leq t \leq 1$. Voor $t_1 < t \leq 1$ blijft hij ongewijzigd.

$$\text{Stel } \gamma(t) = \frac{\int_{-\infty}^t f(t-t_0) \cdot f(t_1-t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) \cdot f(t_1-t) dt}, \quad f \text{ als op pag. 1.}$$



Stel ds_1^2 is de reeds bekende metriek voor $t_0 \leq t \leq 1$, en 0 voor $0 \leq t < t_0$.

Stel ds_2^2 is een willekeurig te kiezen metriek voor $0 \leq t \leq 1$.

Dan is

$$ds^2 = \gamma(t) \cdot ds_1^2 + \{1 - \gamma(t)\} \cdot ds_2^2$$

een C^α -metriek op het gehele simplex die voor $t_1 < t \leq 1$ identiek is met die in het vorige stadium.

6. Differentiaalvormen en de totale kromming op een oppervlak.

Op pag.8 definieerden we de r -differentiaalvormen en het uit-product van 1-vormen op een C^α - m -variëteit X .

Lemma. Zijn $x_1, \dots, x_m$ en $y_1, \dots, y_m$ locale coördinaten voor een omgeving van X , en is $\omega = \sum a_i dx_i = \sum b_j dy_j$ een 1-vorm met coëfficiënten in R of in een reële vectorruimte, dan is

$$\sum da_i \wedge dx_i = \sum db_j \wedge dy_j.$$

Deze 2-vorm (die van de keuze der coördinaten onafhankelijk is) heet de uit-afgeleide van ω , en wordt aangeduid met $d\omega$.

Bewijs:

$$\sum da_i \wedge dx_i = \sum d(b_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i}) \wedge dx_i = \sum db_j \wedge \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i = \sum db_j \wedge dy_j,$$

aangezien $\sum_i d \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \wedge dx_i = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k} dx_k \wedge dx_i = 0$.

Opmerking:

$$d\omega = d(\sum a_i dx_i) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Lemma (bekend) $d\omega = 0$ dan en alleen dan wanneer (locaal) een functie f bestaat, zó dat $\omega = df$. Er geldt dus identiek

$$d(df) = 0 \quad d = \text{uit-afgeleide}.$$

Stelling van Stokes (bekend). Is ω een 1-vorm op een georiënteerde C^2 -2-variëteit W met stukgewijs C^2 -rand ∂W , dan is

$$\int_{\partial W} \omega = \int_W d\omega$$

De krommingsvorm Ω , verkregen op intrinsieke wijze.

X zij nu een georiënteerd C^∞ -oppervlak met Riemannse metriek ds^2 . Wij beschouwen de driedimensionale ruimte V van paren onderling loodrechte contravariante eenheidsvectoren e_1, e_2 , met de eigenschap dat in elk punt p van X de volgorde e_1, e_2 past bij de oriëntatie aldaar. Dat wil zeggen dat locale coördinaten x_1, x_2 bestaan met de gegeven oriëntatie en met $dx_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{voor } i=j \\ 0 & \text{voor } i \neq j \end{cases}$.

Als locale coördinaten in V kan men nemen: twee coördinaten x_1, x_2 om p aan te duiden, alsmede een hoek φ (modulo 2π bepaald) bijvoorbeeld de hoek die de vector e_1 maakt met $\overset{0}{e}_1$ de raakvector in p met

$$dx_2(\overset{0}{e}_1) = 0 \text{ en } dx_1(\overset{0}{e}_1) > 0 .$$

De C^∞ -afbeelding $p: V \rightarrow X$ van elk tweebeeen op zijn oorsprong heet projectie. De tweebeenen met eenzelfde projectie vormen een vezel van de zgn. vezelruimte V met basis X .

De differentiaal in V zijn alle van de gedaante

$$\beta_1 dx_1 + \beta_2 dx_2 + \beta_3 d\varphi .$$

Wij definiëren nu een 1-differentiaalvorm in V namelijk door dit te doen voor elk punt $(p, e_1, e_2) \in V$. Bij zo een punt beschouwen we de projectie $p \in X$ en de vectoren e_1, e_2 aldaar. In X bestaat één covariante vector ω_1 met de waarden

$$\omega_1(e_1) = 1 \quad , \quad \omega_1(e_2) = 0 .$$

Het duale beeld in V van deze covariante vector ω_1 in X , is de gewenste covariante vector in V , die we ook aanduiden met ω_1 . De verzameling van al dergelijke vormen de 1-differentiaalvorm ω_1 op V , die uitsluitend en geheel bepaald is door de gegeven metriek ds^2 in X .

Op analoge wijze wordt ω_2 op V bepaald, zó dat op X

$$\omega_2(e_1) = 0 \quad \omega_2(e_2) = 1 .$$

Zijn $\overset{0}{\omega}_1$ en $\overset{0}{\omega}_2$ zó dat $\overset{0}{\omega}_i(\overset{0}{e}_j) = \delta_{ij}$, en stellen we de duale

beelden onder projectie van $\overset{\circ}{\omega}_1$ en $\overset{\circ}{\omega}_2$ door dezelfde symbolen voor, dan is in V:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \cos \varphi \cdot \overset{\circ}{\omega}_1 + \sin \varphi \cdot \overset{\circ}{\omega}_2 \\ \omega_2 &= -\sin \varphi \cdot \overset{\circ}{\omega}_1 + \cos \varphi \cdot \overset{\circ}{\omega}_2 \end{aligned}$$

Merk op dat $\omega_1 \wedge \omega_2 = \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2$.

Omdat $\overset{\circ}{\omega}_1$ en $\overset{\circ}{\omega}_2$ 1-vormen op X zijn, geldt hetzelfde voor de 2-vormen $d\overset{\circ}{\omega}_1$ en $d\overset{\circ}{\omega}_2$ en we mogen stellen

$$d\overset{\circ}{\omega}_1 = \lambda \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2, \quad d\overset{\circ}{\omega}_2 = \mu \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2$$

en in deze uitdrukkingen komt φ of $d\varphi$ niet voor.

Nu geldt

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d \cos \varphi \wedge \overset{\circ}{\omega}_1 + d \sin \varphi \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 + \cos \varphi \cdot \lambda \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 + \\ &\quad + \sin \varphi \cdot \mu \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 \\ &= d\varphi \wedge (-\sin \varphi \cdot \overset{\circ}{\omega}_1 + \cos \varphi \cdot \overset{\circ}{\omega}_2) + \cos \varphi \cdot \lambda \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 + \\ &\quad + \sin \varphi \cdot \mu \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 \end{aligned}$$

$$d\omega_1 = (-\sin \varphi \cdot \overset{\circ}{\omega}_1 + \cos \varphi \cdot \overset{\circ}{\omega}_2) \wedge (-d\varphi - \mu \overset{\circ}{\omega}_2 - \lambda \overset{\circ}{\omega}_1)$$

en analoog voor $d\omega_2$. Samengevat:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_{21}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \\ -\omega_{12} &= \omega_{21} = -d\varphi - \mu \overset{\circ}{\omega}_2 - \lambda \overset{\circ}{\omega}_1 \end{aligned}$$

De differentiaalvorm ω_{12} is hierdoor in V eenduidig bepaald, zoals men eenvoudig kan bewijzen. ω_{12} is dus ook geheel bepaald door de gegeven metriek ds^2 , en hetzelfde geldt voor

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= \Omega \\ &= d(-\mu \overset{\circ}{\omega}_2 - \lambda \overset{\circ}{\omega}_1). \end{aligned}$$

In deze laatste uitdrukking en 2-vorm komt φ niet voor, en deze 2-vorm is dus een 2-vorm op X. Het is een veelvoud van

$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2$, het "oppervlakte-element",

$$(6.3) \quad \boxed{d\omega_{12} = \Omega = -\kappa \omega_1 \wedge \omega_2} \quad \text{2-vorm op } X$$

Ω heet de krommingsvorm op X . De reële functie κ op X is een invariant van de metriek. Het is de totale kromming van Gauss, zoals we in de volgende paragraaf zullen zien.

De krommingsvorm Ω voor geval X ingebed is in E^3 .

Wij beschouwen de ruimte D der georiënteerde driebeenen (p, e_1, e_2, e_3) in een euclidische driedimensionale ruimte. p, e_1, e_2 en e_3 zijn vectoren in een euclidische vectorruimte. De differentiaalvormen met vectoren als waardengebied, dp, de_1, de_2 en de_3 kunnen in vectorcomponenten ontbonden worden.

$$dp = \omega_A e_A, \quad de_A = \omega_{AB} e_B \quad (\text{Einstein sommatie-conventie } A, B = 1, 2 \text{ en } 3).$$

ω_A en ω_{AB} zijn reële differentiaalvormen op D .
Er geldt

$$(6.4) \quad \begin{cases} 0 = d(dp) = \omega_A de_A + d\omega_A \cdot e_A; & d\omega_A = \omega_B \wedge \omega_{BA} \\ 0 = d(de_A) = -\omega_{AB} de_B + d\omega_{AB} \cdot e_B; & d\omega_{AB} = \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} \end{cases}$$

Wij beperken nu p tot $p \in X$ en voorts tot driebeenen waarvan e_1, e_2 raakvectoren aan X zijn met de bij X passende oriëntatie; $e_3 = n$. Op deze wijze wordt de in de vorige paragraaf genoemde vezelruimte V in D ingebed, terwijl ω_1, ω_2 en dus wegens (6.4) ook ω_{12} de aldaar genoemde betekenis krijgen bij beperking tot V . Dus is

$$(6.5) \quad \boxed{\Omega = -\kappa \omega_1 \wedge \omega_2 = d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}}$$

Kies nu in een punt van X , e_1 en e_2 in de hoofdrichtingen van $X \subset E^3$. Dan is (zie pag.13)

$$dn = de_3 = \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2$$

$$dp = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$$

$$\frac{dp}{dp} \frac{dn}{dp} = \frac{\omega_{31} \omega_1 + \omega_{32} \omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{\kappa_1 \omega_1^2 + \kappa_2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

$$\omega_{31} = \kappa_1 \omega_1, \quad \omega_{32} = \kappa_2 \omega_2$$

$$\Omega = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -\kappa_1 \kappa_2 \omega_1 \wedge \omega_2$$

(6.6)

$$\kappa = \kappa_1 \kappa_2$$

De vorm Ω is het duale beeld van het oppervlakte-element op de eenheidssfeer onder de afbeelding $p \rightarrow e_3$ van $X \subset E^3$ op S^2 . Men kan dit met behulp van het uitproduct van de vectoren in E_3 gecombineerd met het uitproduct der differentiaten uitdrukken door $(n=e_3)$:

$$dn \wedge dn = \kappa dp \wedge dp$$

of uitgeschreven

$$dn \wedge dn = (\kappa_1 \omega_1 e_1 + \kappa_2 \omega_2 e_2) \wedge (\kappa_1 \omega_1 e_1 + \kappa_2 \omega_2 e_2) =$$

$$2 \kappa_1 \kappa_2 (e_1 \wedge e_2) (\omega_1 \wedge \omega_2) = \kappa (\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) \wedge (\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) =$$

$$= \kappa dp \wedge dp.$$

Het kan ook geschreven worden met een determinant waarbij de vermenigvuldiging der differentiaten ook weer uitvermenigvuldiging is:

$$-\Omega = \det(dn, dn, n) = \kappa \det(dp, dp, n) = \kappa \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Voor een oriënteerbaar gesloten oppervlak X is $\int \Omega$ (niet $\int |\Omega|$!) gelijk aan een geheel aantal keren het X oppervlak van S^2 , dus een geheel aantal keren 4π . Dit aantal is $\frac{1}{2} \chi$ met χ karakteristiek getal van Euler Poincaré, zoals wij nog zullen zien.

7. De stelling van Gauss-Bonnet-Euler-Poincaré.

Wij beschouwen het oriënteerbare gesloten oppervlak X met metriek ds^2 . Wij kiezen een veld van eenheidsvectoren, op X , hoogstens uitgezonderd een eindig aantal punten (singulariteiten van het veld), doch elders met componenten die C^∞ -functies der locale coördinaten zijn. Bovendien nemen we aan dat wanneer, in locale coördinaten, $(x,y)=(0,0)$ een singulariteit heeft, en het veld in de buurt daarvan is gegeven door $\varphi(x,y)$, dat dan $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t \cos \psi, t \sin \psi) = \varphi(\psi)$ een differentieerbare functie van ψ is. De singulariteiten zijn dus niet al te lelijk. Wij vatten de eenheidsvectoren van het veld op als eerste benen van tweebeenen, welke tweebeenen een oppervlak $M \subset V$ leveren met een rand ∂M , die geheel bevat is in de vezels boven de singulariteiten in X . Nu geldt op elk stuk van de rand $\omega_1 = \omega_2 = 0$, dus

$$\omega_{12} = d\varphi.$$

Toepassingen van de stelling van Stokes geeft:

$$\begin{aligned} \int_X -\chi \omega_1 \omega_2 &= \int_X \Omega = \int_M \Omega = \int_M d\omega_{12} = \int_{\partial M} \omega_{12} = \int_{\partial M} d\varphi \\ &= \sum_s \int_{\psi=0}^{-2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} d\psi = \sum_s I_s \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

I_s is een geheel getal de index van de singulariteit die aangeduid wordt met symbool s .

Stelling van Gauss-Bonnet-Euler-Poincaré:

$$(7.1) \quad \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_V \Omega = \sum_s I_s = \chi}$$

Het karakteristieke getal van Euler-Poincaré χ is onafhankelijke van de (geschikte) keuze van de singulariteiten van het vectorveld wegens het linkerlid van (7.1).

χ is ook onafhankelijk van de metriek ¹⁾.

Bewijs: Kies een vectorveld en twee metrieken ds^2 en $d\bar{s}^2$ op het oppervlak V . Dan is ook

1) χ is zelfs een topologische invariant.

$$(1-\lambda)ds^2 + \lambda(d\bar{s})^2 \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

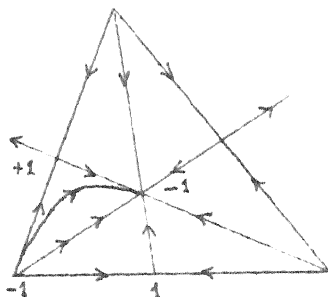
een metriek op V .

Substitutie van deze metriek in (7.1) levert in het linkerlid een continue functie van λ dus ook in het rechterlid een continue functie van λ die echter slechts gehele waarden kan aannemen. Dan is hij constant en het gestelde volgt.

Een voorbeeld van een vectorveld krijgt men door bij een triangulatie in elk simplex een vectorveld te kiezen als in de figuur. Bij zo'n vectorveld leveren de hoekpunten de (midden van de) zijden en de (zwaartepunten) van de driehoeken in $\sum I_s$ bijdragen gelijk aan -1 , $+1$ en -1 respectievelijk, zó dat

$$\chi = \sum I_s = -H + Z - D$$

wanneer H , Z en D de aantallen hoekpunten, zijden en driehoeken van de triangulatie voorstellen. Men denke



aan de stelling van Euler uit de stereometrie. Voor bol en torus is $\chi = -2$ en 0 respectievelijk, hetgeen men op grond van het bovenstaande op vele manieren kan bewijzen. (Op de torus bestaat een singulariteitenvrij vectorveld dus $\chi = 0$; op de torus bestaat een euclidische metriek ($\kappa = 0$) dus $\chi = 0$; op de bol kiese men de gewone eenheidsbolmetriek $\int \Omega = \int -1.d\sigma = -4\pi$, dus: $\chi = -2$; op de bol kiese men N. en Z.pool en het veld van eenheidsvectoren gericht naar het Zuiden in elk punt. Daarmee blijkt $\chi = -1-1=-2$).

Toepassingen.¹⁾

Een éénparameterig (parameter=tijd) stel bewegingen van

1) H.Hopf, Lectures on differential geometry in the large.
Mimeographed notes. Stanford University 1956.

een oppervlak met ds^2 , in zich, bepaalt een snelheidsvectorveld, dat slechts geïsoleerde singulariteiten heeft (snelheid 0). Zo een singulariteit is een stationnair punt en daarom bestaat het vectorveld in de buurt van een singulariteit (op zeker moment t_0) uit raakvectoren aan concentrische cirkels. Zulke singulariteiten leveren een bijdrage $I=-1$. Daaruit volgt de

Stelling: Op een oriënteerbaar gesloten oppervlak X met Euler-Poincaré karakteristiek χ , en metriek ds^2 hoe ook gekozen, is éénparameterige beweging onmogelijk voor geval $\chi > 0$. Voor geval $\chi = 0$ (torus) is beweging soms mogelijk, maar er is geen enkel momentaan invariant punt. Voor geval $\chi = -2$ (bol) is beweging soms mogelijk maar dan heeft die beweging twee momentaan invariante punten.

Men kan hieruit ook nog afleiden: Op een niet-oriënteerbaar oppervlak met ds^2 is één parameterige beweging hoogstens mogelijk indien het een projectief vlak is; en in geval er een beweging is, heeft die één momentaan invariant punt.

Analoge stellingen gelden voor conforme afbeeldingen (i.p.v. bewegingen) van X op zich.

(Bij een (compact) Riemanns oppervlak X van een complexe algebraïsche functie bestaat een invariant gedefiniëerde Riemannse metriek met constante kromming gelijk aan 1 indien X een S^2 is, gelijk aan 0 indien X een torus is, gelijk aan -1 in de andere gevallen. In die andere gevallen is geen infinitesimale beweging van het gevonden oppervlak X met metriek mogelijk.)

7. Isometrisch inbedden in euclidische ruimten.

Een C^∞ -inbedding f van een C^∞ - n -variëteit X^n met Riemannse metriek ds_X^2 in een euclidische ruimte E^{n+N} met metriek ds_E^2 heet isometrisch respectievelijk kort indien

$$f^*(ds_E^2) = ds_X^2 \text{ resp. } f^*(ds_E^2) \leq ds_X^2.$$

De laatste ongelijkheid betekent dat $ds_X^2 - f^*(ds_E^2)$ niet-negatief is.

De volgende vraag ligt nu voor de hand: Bestaat bij een gegeven X^n (inclusief ds_X^2) een euclidische ruimte E^{n+N} en een

isometrische inbedding $f : X^n \rightarrow E^{n+N}$. Wat is de kleinste waarde van N waarvoor zo een inbedding bestaat?

Er zijn verschillende redenen waarom een isometrische inbedding onmogelijk kan zijn.

- a) In de eerste plaats kan een inbedding op grond van topologische eigenschappen (dus onafhankelijk van de metriek) onmogelijk zijn voor geval $N < n$. Zo kan het reële projectieve vlak niet in E^3 worden ingebed.
- b) In de tweede plaats kan een inbedding weliswaar topologisch mogelijk zijn, doch het kan zijn dat de C^1 -structuur zich tegen C^1 -inbedding verzet (onafhankelijk van de metriek). J. Milnor heeft n.l. op S^7 een C^∞ -structuur geconstrueerd die geen C^1 -inbedding in E^8 toelaat. Ann. of Math. 64 (1956), p.399-405.
- c) In de derde plaats kan een isometrische C^3 -inbedding onmogelijk zijn voor geval $N < n-1$ op grond van locale isometrische eigenschappen. Voor $n=2$ is dit duidelijk. Een omgeving van de hyperbolische n -dimensionale ruimte kan bijvoorbeeld niet isometrisch C^3 in E^{2n-2} worden ingebed.
- d) In de vierde plaats bestaan ruimten X^n met de eigenschap dat weliswaar X^n, C^3 ingebed kan worden in E^{n+N} en ook met de eigenschap dat elk punt van X wel een omgeving heeft die isometrisch C^3 in E^{n+N} kan worden afgebeeld, doch zo dat geen globale isometrische inbedding bestaat. Voorbeeld: de locaal-euclidische torus T met coördinaten φ en ψ (modulo 2π) en metriek $ds^2 = d\varphi^2 + d\psi^2$ kan niet C^3 -isometrisch in E^3 worden ingebed (Tompkins, C.). Immers stel er was zo een inbedding $f : T \rightarrow E^3$. Is P een vast punt in E^3 en Q een punt variabel in $f(T)$ dan bereikt de afstand PQ een maximum. Stel dit maximum wordt bereikt in R . Door op de bol met middelpunt P en straal PR te letten ziet men direct dat $f(T)$ in het punt R hoofdkrommingen met hetzelfde teken en ongelijk nul heeft, zodat de totale kromming van $f(T)$ in R positief is. Volgens het gegeven is hij nul, een tegenspraak.

Het begrip isometrische inbedding heeft ook nog zin, indien sprake is van inbeddingen van de differentiëerbaarheidsklasse 1. Daarbij kunnen essentieel nieuwe mogelijkheden optreden, omdat alle krommingseigenschappen verloren gaan. Zo gelden de onder c) en d) genoemde bezwaren niet voor C^1 -inbed-

dingen. Hierop is het eerst de aandacht gevestigd door J. Nash.

Nash beschouwde ook C^2 - en C^1 -inbeddingen en gaf diverse opmerkelijke existentie-stellingen. Verdergaande stellingen betreffende C^1 -inbeddingen werden door de spreker gevonden. Wij vermelden tenslotte enige van deze.

Stellingen:

I Een Riemannse X^n die kort in E^{n+N+1} ingebed kan worden, kan ook C^1 -isometrisch in E^{n+N+1} worden ingebed. $N \geq 0$.

(Nash: $N > 0$, Kuiper: $N \geq 0$).

II Een compacte Riemannse X^n die C^1 in E^{n+N+1} ingebed kan worden, kan ook C^1 -isometrisch in E^{n+N+1} worden ingebed. (Idem)

Gevolg: Een euclidische n -torus kan C^1 isometrisch in E^{n+1} worden ingebed. Het hyperbolische vlak kan C^1 -isometrisch worden ingebed in E^3 . (Kuiper; niet C^4 -isometrisch volgens Hilbert).

III Een niet-compacte Riemannse X^n die C^1 in E^{n+N} kan worden ingebed kan kort en C^1 dus isometrisch in E^{n+N+1} worden ingebed. (Kuiper)

IV De verhoging der dimensie in stelling III kan niet gemist worden. (Idem)

Het elliptische vlak minus één punt kan C^1 in E^3 worden ingebed, maar niet C^1 -kort, laat staan C^1 -isometrisch.

Opmerking. Een gewone 2-sfeer met straal R kan C^1 -isometrisch worden ingebed in een omgeving hoe klein ook gekozen, van een punt in een euclidische driedimensionale ruimte. Ook de starheid van het boloppervlak is dus gebonden aan hogere klasse van differentiëerbaarheid dan C^1 .

V Een oriënteerbaar oppervlak met Riemannse metriek, dat diffeomorf is met een compact oppervlak minus eindig veel punten, kan C^1 -isometrisch in E^3 worden ingebed. (Idem)

Een ruimte met Riemannse metriek heet metrisch compleet, indien voor elk punt P en elk getal λ de verzameling van punten Q met afstand $(P, Q) \leq \lambda$, een compacte verzameling is. Men kan zich nu nog de vraag stellen of een gegeven complete X^n met metriek, afgesloten-in- E^{n+N} kan worden ingebed. Een voor-

beeld waarbij de eis van afgeslotenheid-in- E^{n+N} een onoverkomelijke hindernis bepaalt, wordt gegeven door een geschikt gekozen complete metriek op een open Moebiusband, die daarmee wel kort en C^1 -isometrisch niet-afgesloten-in- E^3 kan worden ingebed, maar niet C^1 -isometrisch afgesloten in E^3 . Men neme de metriek $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ op de Moebiusband die uit de hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ontstaat door de identificatie $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$.

Nash, J. C^1 -isometric imbeddings. Annals of Math. 60, 383-396 (1954).

——— The imbedding problem for Riemannian manifolds. Ann. of Math. 63, 20-63 (1956).

Kuiper, N.H. On C^1 -isometric imbeddings. Proc. Amsterdam 58 (1955) p.545-556, 683-689.

——— Differentiaal meetkunde. Vacantiecursus Math. Centrum 1957; Euclides 1958.